अध्याय 4

दो चरों वाले रैखिक समीकरण

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

एक समीकरण ऐसा कथन है जिसमें एक व्यंजक दूसरे व्यंजक के बराबर होता है। $ax + by + c = 0$, के रूप की समीकरण, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं, ताकि $a \neq 0$ और $b \neq 0$ हो, दो चरों में एक रैखिक समीकरण कहलाती है। समीकरण के हल ज्ञात करने की प्रक्रिया समीकरण को हल करना कहलाती है।

किसी रैखिक समीकरण के हल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता, जब

(i) समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ी जाए (या उनमें से एक ही संख्या घटाई जाए)।

(ii) समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही शून्येतर संख्या से गुणा किया (या भाग दिया) जाए।

साथ ही, दो चरों वाली एक रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं। दो चरों वाली प्रत्येक रैखिक समीकरण का आलेख एक सरल रेखा होता है तथा इस आलेख (सरल रेखा) पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस रैखिक समीकरण का एक हल निरूपित करता है। इस प्रकार, रैखिक समीकरण के प्रत्येक हल को समीकरण के आलेख पर एक अद्वितीय बिंदु द्वारा निरूपित कर सकते हैं। $x = a$ और $y = a$ के आलेख क्रमशः y-अक्ष और x-अक्ष के समांतर रेखाएँ हैं।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए-

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : रैखिक समीकरण $3x - y = x - 1$

(A) का एक अद्वितीय हल है (B) के दो हल हैं

(C) के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं (D) का कोई हल नहीं है।

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : दो चरों में रैखिक समीकरण $ax + by + c = 0$ के रूप की होती है, जहाँ

(A) $a \neq 0, b \neq 0$ (B) $a = 0, b \neq 0$ (C) $a \neq 0, b = 0$ (D) $a = 0, c = 0$

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : y-अक्ष पर स्थिति कोई भी बिंदु निम्नलिखित रूप का होता है:

(A) $(x, 0)$ (B) (x, y) (C) $(0, y)$ (D) (y, y)

हल : उत्तर (C)

प्रश्नावली 4.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए–

1. रैखिक समीकरण $2x - 5y = 7$

(A) का एक अद्वितीय हल है (B) के दो हल हैं

(C) के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं (D) का कोई हल नहीं है

2. रैखिक समीकरण $2x + 5y = 7$ का एक अद्वितीय हल है, यदि x, y है

(A) प्राकृत संख्याएँ (B) धनात्मक वास्तविक संख्याएँ

(C) वास्तविक संख्याएँ (D) परिमेय संख्याएँ

3. यदि $(2, 0)$ रैखिक समीकरण $2x + 3y = k$ का एक हल है, तो k का मान है

(A) 4 (B) 6 (C) 5 (D) 2

4. दो चरों वाली रैखिक समीकरण $2x + 0y + 9 = 0$ के किसी भी हल का रूप होता है

(A) $(-\frac{9}{2}, m)$ (B) $(n, -\frac{9}{2})$

(C) $(0, -\frac{9}{2})$ (D) $(-9, 0)$

5. रैखिक समीकरण $2x + 3y = 6$ का आलेख y-अक्ष को निम्नलिखित में से किस बिंदु पर काटता है

(A) $(2, 0)$ (B) $(0, 3)$ (C) $(3, 0)$ (D) $(0, 2)$

6. समीकरण $x = 7$ को दो चरों में इस प्रकार लिखा जा सकता है

(A) $1 . x + 1 . y = 7$ (B) $1. x + 0. y = 7$

(C) $0 . x + 1 . y = 7$ (D) $0 . x + 0 . y = 7$

7. x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु का रूप होता है

(A) (x, y) (B) $(0, y)$ (C) $(x, 0)$ (D) (x, x)

8. रेखा $y = x$ पर स्थि त किसी बिंदु का रूप होता है

(A) (a, a) (B) $(0, a)$ (C) $(a, 0)$ (D) $(a, -a)$

9. x-अक्ष की समीकरण का रूप है

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x = y$

10. $y = 6$ का आलेख एक रेखा है, जो

(A) x-अक्ष के समांतर है और मूलबिंदु से 6 मात्रक की दूरी पर है

(B) y-अक्ष के समांतर है और मूलबिंदु से 6 मात्रक की दूरी पर है

(C) x-अक्ष पर अंत:खंड 6 काटती है

(D) दोनों अक्षों पर अंत:खंड 6 काटती है

11. $x = 5, y = 2$ निम्नलिखित रैखिक समीकरण का एक हल है

(A) $x + 2y = 7$ (B) $5x + 2y = 7$ (C) $x + y = 7$ (D) $5x + y = 7$

12. यदि किसी रैखिक समीकरण के हल $(-2, 2), (0, 0)$ और $(2, -2)$ हैं, तो इसका रूप होता है

(A) $y - x = 0$ (B) $x + y = 0$

(C) $-2x + y = 0$ (D) $-x + 2y = 0$

13. समीकरण $ax + by + c = 0$ के धनात्मक हल सदैव निम्नलिखित में स्थित होते हैं

(A) प्रथम चतुर्थांश (B) द्वितीय चतुर्थांश

(C) तृतीय चतुर्थांश (D) चतुर्थ चतुर्थांश

14. रैखिक समीकरण $2x + 3y = 6$ का आलेख एक रेखा है जो x-अक्ष को निम्नलिखित बिंदु पर मिलती है

(A) $(0, 2)$ (B) $(2, 0)$ (C) $(3, 0)$ (D) $(0, 3)$

15. रैखिक समीकरण $y = x$ का आलेख निम्नलिखित बिंदु से होकर जाता है

(A) $\left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ (B) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ (C) $(1, 1)$ (D) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

16. यदि हम किसी रैखिक समीकरण को एक शून्येतर संख्या से गुणा करें या भाग दें तो उस रैखिक समीकरण का हल

(A) बदल जाता है

(B) वही रहता है

(C) केवल गुणा की स्थिति में बदल जाता है

(D) केवल भाग की स्थिति में बदल जाता है

17. $x = 1$ और $y = 2$ द्वारा x और y में कितनी रैखिक समीकरण संतुष्ट होती हैं?

(A) केवल एक (B) दो

(C) अपरिमित रूप से अनेक (D) तीन

18. (a, a) रूप का बिंदु सदैव स्थित होता है

(A) x-अक्ष पर (B) y-अक्ष पर

(C) रेखा $y = x$ पर (D) रेखा $x + y = 0$ पर

19. $(a, -a)$ रूप का बिंदु सदैव रेखा पर स्थित होता है

(A) $x = a$ (B) $y = -a$ (C) $y = x$ (D) $x + y = 0$

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य** लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $ax + by + c = 0$, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं, दो चरों में एक रैखिक समीकरण है

(ii) रैखिक समीकरण $2x + 3y = 5$ का एक अद्वितीय हल है

(iii) सभी बिंदु $(2, 0), (-3, 0), (4, 2)$ और $(0, 5)$; x-अक्ष पर स्थित हैं

(iv) y-अक्ष के समांतर और y-अक्ष के बाईं ओर 4 मात्रक दूरी पर स्थित रेखा को समीकरण $x = -4$ से निरूपित किया जाता है

(v) समीकरण $y = mx + c$ का आलेख मूलबिंदु से होकर जाता है

हल :

(i) असत्य, क्योंकि $ax + by + c = 0$ दो चरों में रैखिक समीकरण होती है, यदि a और b दोनों शून्येतर हों।

(ii) असत्य, क्योंकि दो चरों वाली रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।

(iii) असत्य, क्योंकि बिंदु $(2, 0), (-3, 0)$ x-अक्ष पर स्थित हैं। $(4, 2)$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है और $(0, 5)$ y-अक्ष पर स्थित है।

(iv) सत्य, क्योंकि y-अक्ष के समांतर और y-अक्ष के बाईं ओर a मात्रक दूरी पर रेखा की समीकरण $x = -a$ के रूप की होती है।

(v) असत्य, क्योंकि $x = 0, y = 0$ समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : निम्नलिखित कथन **सत्य** है या **असत्य** लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

सारणी

x	0	1	2	3	4
y	2	4	6	8	10

से प्राप्त होने वाले बिंदुओं के निर्देशांक समीकरण $2x + 2 = y$ के कुछ हलों को निरूपित करते हैं।

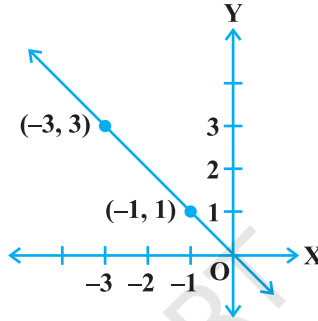
हल : सत्य, क्योंकि निर्देशांकों को देखने से पता लगता है कि प्रत्येक y-निर्देशांक, x-निर्देशांक के दोगुने से 2 अधिक है।

प्रश्नावली 4.2

*निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य** लिखिए। अपने उत्तरों का औचित्य दीजिए –*

1. बिंदु (0, 3) रैखिक समीकरण $3x + 4y = 12$ के आलेख पर स्थित है।

2. रैखिक समीकरण $x + 2y = 7$ का आलेख बिंदु (0, 7) से होकर जाता है।

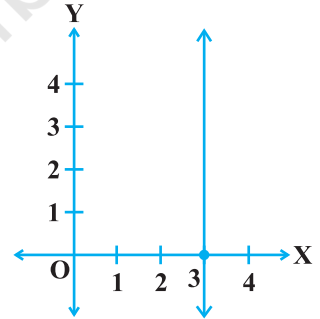
3. नीचे दिया गया आलेख रैखिक समीकरण $x + y = 0$ को निरूपित करता है:

आकृति 4.1

4. नीचे दिया गया आलेख रैखिक समीकरण $x = 3$ (देखिए आकृति 4.2) को निरूपित करता है:

आकृति 4.2

5. सारणी

x	0	1	2	3	4
$.y$	2	3	4	–5	6

से प्राप्त बिंदुओं के निर्देशांक समीकरण $x - y + 2 = 0$ के कुछ हलों को निरूपित करते हैं।

6. दो चरों वाली रैखिक समीकरण के आलेख का प्रत्येक बिंदु उस समीकरण का एक हल निरूपित नहीं करता है।

7. दो चरों वाली रैखिक समीकरण के आलेख का एक सरल रेखा होना आवश्यक नहीं है।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : उन बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ समीकरण $3x + 4y = 12$ का आलेख x-अक्ष और y-अक्ष को काटता है।

हल : रैखिक समीकरण $3x + 4y = 12$ का आलेख x-अक्ष को उस बिंदु पर काटता है जहाँ $y = 0$ है।

रैखिक समीकरण में, $y = 0$ रखने पर, हमें $3x = 12$, अर्थात् $x = 4$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, वाँछित बिंदु (4, 0) है।

रैखिक समीकरण $3x + 4y = 12$ का आलेख y-अक्ष को उस बिंदु पर काटता है, जहाँ $x = 0$ है। दी हुई समीकरण में, $x = 0$ रखने पर, हमें $4y = 12$, अर्थात् $y = 3$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, वाँछित बिंदु (0, 3) है।

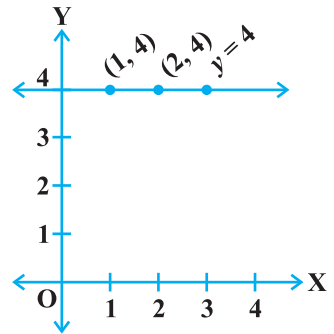
प्रतिदर्श प्रश्न 2 : रैखिक समीकरण $x + y = 5$ का आलेख उस रेखा को किस बिंदु पर काटता है जो y-अक्ष के समांतर है, मूलबिंदु से 2 मात्रक की दूरी पर है तथा x-अक्ष की धनात्मक दिशा में है।

हल : उस रेखा पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक, जो y-अक्ष के समांतर हैं, मूलबिंदु से 2 मात्रक की दूरी पर हैं तथा x-अक्ष की धनात्मक दिशा में हैं, $(2, a)$ के रूप के होंगे। समीकरण $x + y = 5$ में, $x = 2$ और $y = a$ रखने पर, $a = 3$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, वाँछित बिंदु (2, 3) है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : समीकरण $2x + 5y = 20$ के आलेख पर वह बिंदु निर्धारित कीजिए जिसका x-निर्देशांक कोटि का $\frac{5}{2}$ गुना है।

हल : क्योंकि बिंदु का x-निर्देशांक उसकी कोटि का $\frac{5}{2}$ गुना है, इसलिए $x = \frac{5}{2}y$ है। अब, $2x + 5y = 20$ में, $x = \frac{5}{2}y$ रखने पर, हमें $y = 2$ प्राप्त होता है। अत: $x = 5$ है। इसलिए, वाँछित बिंदु (5, 2) है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : उस सरल रेखा से निरूपित समीकरण का आलेख खींचिए जो x-अक्ष के समांतर है तथा उससे 4 मात्रक ऊपर है।

हल : x-अक्ष के समांतर कोई भी सरल रेखा $y = k$ के रूप की होती है, जहाँ k उस रेखा की x-अक्ष से दूरी होती है। यहाँ $k = 4$ है। अत:, रेखा की समीकरण $y = 4$ है। इस समीकरण का आलेख खींचने के लिए, बिंदु (1, 4) और (2, 4) को आलेखित कीजिए और उन्हें मिलाकर एक रेखा खींचिए। यही वाँछित आलेख है (आकृति 4.3)।

आकृति 4.3

प्रश्नावली 4.3

1. एक ही कार्तीय तल में $y = x$ और $y = -x$ रैखिक समीकरणों के आलेख खींचिए। आप क्या देखते हैं?

2. रैखिक समीकरण $2x + 5y = 19$ के आलेख पर वह बिंदु निर्धारित कीजिए जिसकी कोटि अपने भुज की $1\frac{1}{2}$ गुनी है।

3. उस सरल रेखा से निरूपित समीकरण का आलेख खींचिए जो x-अक्ष के समांतर है और उसके नीचे 3 मात्रक की दूरी पर है।

4. उस रैखिक समीकरण का आलेख खींचिए जिसके हल उन बिंदुओं से निरूपित हैं, जिनके निर्देशांकों का योग 10 इकाई है।

5. वह रैखिक समीकरण लिखिए, जिसके आलेख के प्रत्येक बिंदु की कोटि उसकी भुज की तीन गुनी है।

6. यदि बिंदु (3, 4) समीकरण $3y = ax + 7$ के आलेख पर स्थित है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

7. समीकरण $2x + 1 = x - 3$ के निम्नलिखित पर कितने हल स्थित हैं:

(i) संख्या रेखा (ii) कार्तीय तल

8. रैखिक समीकरण $x + 2y = 8$ का वह हल ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित पर एक बिंदु निरूपित करता है :

(i) x-अक्ष (ii) y-अक्ष

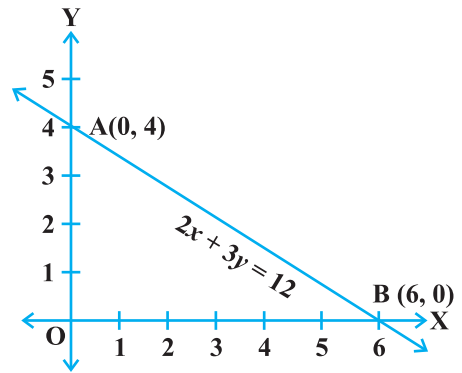
9. c के किस मान के लिए, रैखिक समीकरण $2x + cy = 8$ के हल में x और y के मान बराबर होंगे?

10. मान लीजिए कि y, x के अनुक्रमानुपाती है। यदि $x = 4$ होने पर $y = 12$ हो, तो एक रैखिक समीकरण लिखिए। जब $x = 5$ है, तो y का क्या मान है?

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : रैखिक समीकरण $2x + 3y = 12$ का आलेख खींचिए। इस समीकरण का आलेख x-अक्ष और y-अक्ष को किन बिंदुओं पर काटता है?

हल : दी हुई समीकरण $2x + 3y = 12$ है। इस समीकरण का आलेख खींचने के लिए, हमें आलेख पर स्थित न्यूनतम दो बिंदुओं की आवश्यकता है।

समीकरण से, हमें $y = \frac{12-2x}{3}$ प्राप्त होता है। $x=0$ के लिए $y=4$ है। अतः, (0, 4) आलेख पर स्थित है। $y = 0$ के लिए $x = 6$ है। अतः, (6, 0) आलेख पर स्थित है। अब बिंदुओं A (0, 4) और B (6, 0) को आलेखित कीजिए तथा उन्हें मिला कर रेखा AB बना लीजिए (देखिए आकृति 4.4)। रेखा AB ही वाँछित आलेख है।

आकृति 4.4

आप देख सकते हैं कि यह आलेख (रेखा AB), x-अक्ष को (6, 0) और y-अक्ष को (0, 4) पर काटता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यह सोचा गया कि x और y के निम्नलिखित मान एक रैखिक समीकरण को संतुष्ट करते हैं :

x	1	2
y	1	3

उपरोक्त सारणी में दिए x और y के मानों का प्रयोग करके, एक आलेख खींचिए। रैखिक समीकरण का यह आलेख निम्नलिखित को किस बिंदु पर काटता है?

(i) x-अक्ष (ii) y-अक्ष

आकृति 4.5

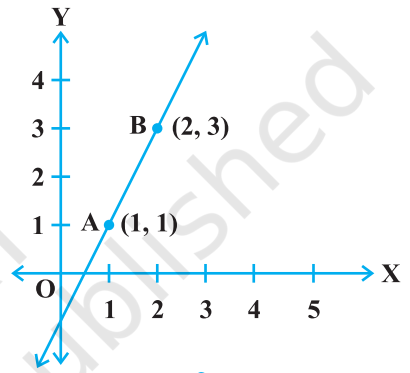
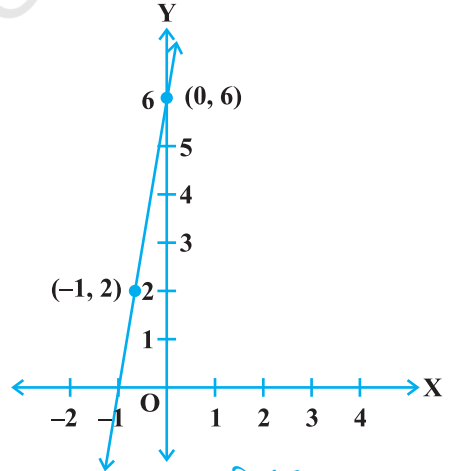
हल : सारणी से, हमें दो बिंदु A (1, 1) और B (2, 3) प्राप्त होते हैं, जो रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित हैं। स्पष्टत: यह आलेख एक सरल रेखा होगा। अत:, हम पहले बिंदु A और B आलेखित करते हैं तथा उन्हें आकृति 4.5 में दर्शाए अनुसार मिला देते हैं।

आकृति 4.5 से, हम देखते हैं कि आलेख x-अक्ष को $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ तथा y-अक्ष को (0, –1) पर काटता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : एक शहर में, ऑटोरिक्शा का किराया पहले किलोमीटर के लिए 10 रु तथा उसके बाद की दूरी के लिए 4 रु प्रति किलोमीटर है। उपरोक्त कथन को व्यक्त करने के लिए, एक रैखिक समीकरण लिखिए। इस रैखिक समीकरण का आलेख खींचिए।

आकृति 4.6

हल : मान लीजिए कि कुल तय की गई दूरी x km है तथा लिया गया कुल किराया y रु है। तब पहले km का किराया 10 रु है तथा शेष $(x-1)$ km का किराया $4(x-1)$ रु है। अत:, $y = 10 + 4(x-1) = 4x + 6$ है।

अर्थात्, वाँछित समीकरण $y = 4x + 6$ है। अब, जब $x = 0$, तो $y = 6$ है तथा जब $x = -1$, तो $y = 2$ है। वाँछित आलेख आकृति 4.6 में दिया गया है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : किसी पिंड पर एक अचर बल लगाने पर, उसके द्वारा किया गया कार्य उस अचर बल और बल की दिशा में पिंड द्वारा चली गई दूरी के गुणनफल के बराबर होता है। अचर बल 3 मात्रक लेते हुए, इस तथ्य को एक रैखिक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए तथा उसका आलेख खींचिए। किया गया कार्य कितना है, जब चली गई दूरी 2 मात्रक है। इसे आलेख से सत्यापित कीजिए।

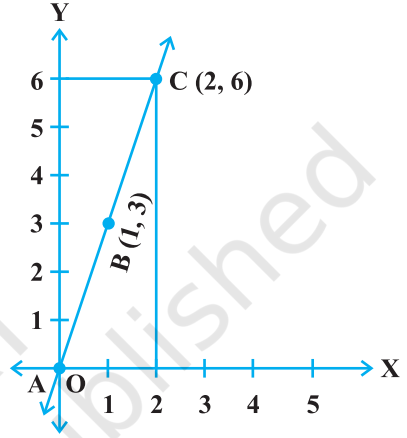
हल : किया गया कार्य = (अचर बल) × (दूरी)

= 3 × (दूरी),

अर्थात्, $y = 3x$ है, जहाँ y (मात्रक) किया गया कार्य है तथा x (मात्रक) चली गई दूरी है। क्योंकि $x = 2$ मात्रक (दिया) है, अत:, किया गया कार्य = 6 मात्रक है। रैखिक समीकरण $y = 3x$ का आलेख खींचने के लिए, हमें इस समीकरण के न्यूनतम दो हल चाहिए। हम देखते हैं कि $x = 0, y = 0$ इस समीकरण को संतुष्ट करता है तथा $x = 1, y = 3$ भी इस समीकरण को संतुष्ट करता है।

आकृति 4.7

अब, हम बिंदुओं A (0, 0) और B (1, 3) को आलेखित करते हैं तथा AB को मिला देते हैं (देखिए आकृति 4.7)। समीकरण का आलेख एक सरल रेखा है। [हमने पूरी रेखा नहीं दिखाई है, क्योंकि किया गया कार्य ऋणात्मक नहीं होगा]।

आलेख से सत्यापित करने के लिए, बिंदु (2, 0) से होकर x-अक्ष पर लम्ब खींचिए, जो आलेख को C पर काटता है। स्पष्टत:, C के निर्देशांक (2, 6) हैं। इसका अर्थ है कि किया गया कार्य 6 मात्रक है।

प्रश्नावली 4.4

1. दर्शाइए कि बिंदु A (1, 2), B (– 1, – 16) और C (0, – 7) रैखिक समीकरण $y = 9x - 7$ के आलेख पर स्थित हैं।

2. सोचा गया कि x और y के निम्नलिखित मान एक रैखिक समीकरण को संतुष्ट करते हैं:

x	6	–6
y	–2	6

वह रैखिक समीकरण लिखिए। उपरोक्त सारणी में दिए x और y के मानों का उपयोग करते हुए आलेख खींचिए। इस रैखिक समीकरण का आलेख निम्नलिखित को किस बिंदु पर काटता है?

(i) x-अक्ष (ii) y-अक्ष

3. रैखिक समीकरण $3x + 4y = 6$ का आलेख खींचिए। यह आलेख x-अक्ष और y-अक्ष को किन बिंदुओं पर काटता है?

4. वह रैखिक समीकरण, जो फारेनहाइट (F) को सेल्सियस (C) में बदलती है, संबंध $C = \frac{5F - 160}{9}$ से दी जाती है।

(i) यदि तापमान 86°F है, तो सेल्सियस में तापमान क्या है?

(ii) यदि तापमान 35°C है, तो फारेनहाइट में तापमान क्या है?

(iii) यदि तापमान 0°C है, तो फारेनहाइट में तापमान क्या है तथा यदि तापमान 0°F है, तो सेल्सियस में तापमान क्या है?

(iv) तापमान का वह कौन-सा संख्यात्मक मान है जो दोनों पैमानों (मात्रकों) में एक ही है?

5. यदि एक द्रव का तापमान केल्विन मात्रकों में x°K है या फारेनहाइट मात्रकों में y°F है, तो तापमानों के मापन की दोनों पद्धतियों के बीच संबंध रैखिक समीकरण $y = \frac{9}{5}(x - 273) + 32$ द्वारा दिया जाता है।

(i) यदि किसी द्रव का तापमान 313°K है, तो उसका फारेनहाइट में तापमान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि तापमान 158° F है, तो केल्विन में तापमान ज्ञात कीजिए।

6. किसी गाड़ी को खींचने में लगाया गया बल उस गाड़ी (पिंड) में उत्पन्न किए गए त्वरण के अनुक्रमानुपाती है। इस कथन को दो चारों वाले एक रैखिक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए तथा अचर द्रव्यमान 6 kg लेकर, इसका आलेख खींचिए। आलेख से वाँछित बल ज्ञात कीजिए, जब उत्पन्न त्वरण (i) 5 m/sec^2 है, (ii) 6 m/sec^2 है।